

# *Álgebra Linear*

PARA

**LEIGOS<sup>®</sup>**



# Álgebra Linear

PARA  
LEIGOS<sup>®</sup>

por Mary Jane Sterling



ALTA BOOKS

E D I T O R A

Rio de Janeiro, 2012

# *Sobre o Autor*

**Mary Jane Sterling** é autora de outros títulos como: *Math Word Problems For Dummies* e *Business Math For Dummies* (todos publicados pela Wiley). Além de *Álgebra Para Leigos*, *Álgebra II Para Leigos* e *Trigonometria Para Leigos* (publicados pela Alta Books).

Mary Jane continua fazendo o que ela mais ama: ensinando Matemática. Assim como os livros *Para Leigos* são divertidos de escrever, é a interação com alunos e colegas que a faz continuar. Bem, há também o seu marido, Ted, seus filhos, a Kiwanis Heart of Illinois Aktion Club, pescaria e leitura. Ela gosta de estar ocupada!



# *Dedicatória*

Eu dedico este livro aos amigos e colegas, do passado e do presente da Universidade de Bradley. Sem as suas amizades, conselhos e apoio durante estes 30 anos que se passaram, minha experiência em ensinar não teria sido tão especial e minha oportunidade de escrever não teria sido a mesma. Esta tem sido uma jornada interessante e eu agradeço a todos que a fizeram assim.

# *Agradecimentos do Autor*

Muito obrigada a Elizabeth Kuball, que novamente concordou em me ver através de todas as muitas vitórias e quase vitórias, tentativas e erros, falhas e tiros certos – a todos os envolvidos na criação deste livro. Elizabeth faz de tudo – do projeto a edição de texto. Seu olhar aguçado e comentários coerentes são muito apreciados.

Além disso, muito obrigada ao meu editor técnico, John Haverhals. Fiquei especialmente satisfeita pois ele concordaria com a certeza de que eu acertei.

E, claro, um grato agradecimento à minha editora de aquisições, Lindsay Lefevre, que encontrou ainda outro projeto interessante para mim.



# Sumário Resumido

|  |            |
|--|------------|
| <b><i>Introdução</i></b> .....   | <b>1</b>   |
| <b><i>Parte I: Alinhando os Fundamentos da Álgebra Linear</i></b> ...                                  | <b>7</b>   |
| Capítulo 1: Definindo a Álgebra Linear.....  | 9          |
| Capítulo 2: O Valor dos Vetores.....   | 19         |
| Capítulo 3: Dominando Matrizes e Álgebra Matricial.....  | 41         |
| Capítulo 4: Sistematizando-se com Sistemas de Equações.....  | 65         |
| <b><i>Parte II: Relacionando Vetores e Transformações Lineares</i></b> ..                              | <b>85</b>  |
| Capítulo 5: Definindo Combinações Lineares.....  | 87         |
| Capítulo 6: Investigando a Equação Matricial $Ax = b$ .....  | 105        |
| Capítulo 7: Focando nos Sistemas Homogêneos e na Independência Linear .....                            | 123        |
| Capítulo 8: Fazendo Mudanças com Transformações Lineares.....  | 147        |
| <b><i>Parte III: Avaliando Determinantes</i></b> .....   | <b>173</b> |
| Capítulo 9: Mantendo as Coisas em Ordem com Permutações .....  | 175        |
| Capítulo 10: Determinando Valores de Determinantes.....  | 185        |
| Capítulo 11: Personalizando as Propriedades de Determinantes .....                                     | 201        |
| Capítulo 12: Tirando Vantagem da Regra de Cramer.....  | 223        |
| <b><i>Parte IV: Conhecendo Espaços Vetoriais</i></b> .....   | <b>239</b> |
| Capítulo 13: Promovendo as Propriedades de Espaços Vetoriais.....                                      | 241        |
| Capítulo 14: Buscando Subespaços de um Espaço Vetorial .....   | 255        |
| Capítulo 15: Pontuando com Bases de Espaços Vetoriais .....  | 273        |
| Capítulo 16: De olho em Autovalores e Autovetores.....   | 289        |
| <b><i>Parte V: A Parte dos Dez</i></b> .....   | <b>309</b> |
| Capítulo 17: Dez Formas de Utilizar as Matrizes no Mundo Real.....                                     | 311        |
| Capítulo 18: Dez (ou mais) Processos de Álgebra Linear<br>que Você Pode Fazer em sua Calculadora ..... | 327        |
| Capítulo 19: Dez Significados Matemáticos de Letras Gregas .....                                       | 339        |
| <b><i>Glossário</i></b> .....  | <b>343</b> |
| <b><i>Índice</i></b> .....   | <b>351</b> |





# Sumário

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Introdução .....</b>   | <b>1</b>  |
| Sobre Este Livro.....   | 1         |
| Convenções Usadas Neste Livro .....                                 | 2         |
| Só de Passagem.....   | 2         |
| Penso que.....  | 2         |
| Como Este Livro Está Organizado.....                                | 3         |
| Parte I: Alinhando os Fundamentos da Álgebra Linear.....            | 3         |
| Parte II: Relacionando Vetores e Transformações Lineares.....       | 3         |
| Parte III: Avaliando Determinantes.....                             | 3         |
| Parte IV: Envolvendo Espaços Vetoriais .....                        | 4         |
| Parte V: A Parte dos Dez .....                                      | 4         |
| Ícones Usados Neste Livro .....                                     | 4         |
| De Lá para Cá, Daqui para Lá.....                                   | 5         |
| <br>  |           |
| <b>Parte I: Alinhando os Fundamentos da Álgebra Linear ...</b>      | <b>7</b>  |
| <b>Capítulo 1: Definindo a Álgebra Linear .....</b>                 | <b>9</b>  |
| Resolvendo Sistemas de Equações de Todas as Maneiras.....           | 10        |
| Combinando e Arranjando Dados em Matrizes.....                      | 12        |
| Avaliando os Espaços Vetoriais .....                                | 14        |
| Determinando Valores com Determinantes .....                        | 15        |
| Zerando com Autovalores e Autovetores .....                         | 16        |
| <b>Capítulo 2: O Valor dos Vetores.....</b>                         | <b>19</b> |
| Descrevendo Vetores no Plano .....                                  | 19        |
| Dedicando-se aos vetores em planos coordenados.....                 | 20        |
| Adição de uma dimensão com vetores no espaço .....                  | 23        |
| Definindo as Propriedades Algébricas e Geométricas dos Vetores..... | 24        |
| Vasculhando a multiplicação por um escalar .....                    | 24        |
| Adição e subtração de vetores.....                                  | 27        |
| Gerenciando o Módulo de um Vetor .....                              | 29        |
| Ajustando o módulo para a multiplicação escalar .....               | 30        |
| Fazendo tudo certo com a desigualdade triangular .....              | 32        |
| Obtendo lucros com o produto interno.....                           | 35        |
| Fazendo certo com ângulos .....                                     | 37        |
| <b>Capítulo 3: Dominando Matrizes e Álgebra Matricial .....</b>     | <b>41</b> |
| Botando a Mão na Massa com os Fundamentos de Matrizes.....          | 41        |
| Familiarizando-se com a notação de matriz .....                     | 42        |
| Definindo a dimensão .....  | 43        |
| Colocando Operações Matriciais na Programação .....                 | 43        |

|  |            |
|--|------------|
| Adição e subtração de matrizes .....   | 43         |
| Escalando às alturas com a multiplicação escalar .....                       | 45         |
| Fazendo a multiplicação de matrizes funcionar .....                          | 45         |
| Rotulando os Tipos de Matrizes .....   | 48         |
| Identificando matrizes identidade .....                                      | 49         |
| Triangulação com matrizes triangulares e diagonais .....                     | 51         |
| Duplicando com matrizes singulares e não singulares.....                     | 51         |
| Ligando Tudo Isso à Álgebra Matricial .....                                  | 52         |
| Delineando as propriedades com a adição .....                                | 52         |
| Conhecendo as propriedades da multiplicação .....                            | 53         |
| Distribuindo a riqueza usando a multiplicação e a adição de matrizes.....    | 55         |
| Transposição de uma matriz.....  | 55         |
| Conquistando matrizes zero.....  | 56         |
| Estabelecendo as propriedades de uma matriz inversível .....                 | 57         |
| Investigando o Inverso de uma Matriz .....                                   | 58         |
| Suprimindo rapidamente o inverso de $2 \times 2$ .....                       | 59         |
| Encontrando inversos usando a redução de linha.....                          | 60         |
| <b>Capítulo 4: Sistematizando-se com Sistemas de Equações .....</b>          | <b>65</b>  |
| Investigando Soluções para Sistemas.....                                     | 65         |
| Reconhecendo as características de ter apenas uma solução .....              | 66         |
| Escrevendo expressões para soluções infinitas .....                          | 67         |
| Fazendo gráficos de sistemas de duas ou três equações .....                  | 67         |
| Lidando com Sistemas Inconsistentes e Sem Solução .....                      | 71         |
| Resolvendo Sistemas Algebricamente .....                                     | 72         |
| Iniciando com um sistema de duas equações .....                              | 73         |
| Estendendo o procedimento para mais de duas equações .....                   | 74         |
| Revisitando Sistemas de Equações Usando Matrizes .....                       | 76         |
| Instituir inversas para resolver sistemas .....                              | 77         |
| Introdução às matrizes aumentadas .....                                      | 78         |
| Escrevendo soluções paramétricas para matrizes aumentadas.....               | 82         |
| <b>Parte II: Relacionando Vetores e Transformações Lineares....</b>          | <b>85</b>  |
| <b>Capítulo 5: Definindo Combinações Lineares.....</b>                       | <b>87</b>  |
| Definindo Combinações Lineares de Vetores.....                               | 87         |
| Escrevendo vetores como somas de outros vetores.....                         | 88         |
| Determinando o lugar de um vetor.....  | 89         |
| Buscando padrões em combinações lineares .....                               | 93         |
| Visualizando combinações lineares de vetores.....                            | 95         |
| Prestando Atenção no Espaço Gerado .....                                     | 95         |
| Descrevendo o espaço gerado de um conjunto de vetores.....                   | 96         |
| Mostrando quais vetores pertencem a um espaço gerado.....                    | 98         |
| Expandindo $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ .....                             | 101        |
| <b>Capítulo 6: Investigando a Equação Matricial <math>Ax = b</math>.....</b> | <b>105</b> |
| Trabalhando Através de Produtos de Vetores-Matriz .....                      | 106        |

|  |     |
|--|-----|
| Estabelecendo uma ligação com os produtos da matriz.....   | 106 |
| Vinculando sistemas de equações e a equação da matriz..... | 108 |
| Confirmando a Existência de uma Solução ou Soluções.....   | 110 |
| Individualizando uma solução única .....                   | 110 |
| Abrindo caminho para mais de uma solução.....              | 112 |
| Chegando a lugar nenhum porque não há nenhuma solução..... | 120 |

## **Capítulo 7: Focando Sistemas Homogêneos**

### **e na Independência Linear..... 123**

|   |     |
|---|-----|
| Buscando Soluções de Sistemas Homogêneos.....                       | 123 |
| Determinar a diferença entre soluções triviais e não triviais.....  | 124 |
| Formulando a forma de uma solução.....                              | 126 |
| Aprofundando-se na independência linear.....                        | 128 |
| Testando a dependência ou independência .....                       | 129 |
| Caracterizando conjuntos de vetores linearmente independentes ..... | 132 |
| Conectando Tudo à Base.....   | 135 |
| Chegando à primeira base com a base de um espaço vetorial .....     | 136 |
| Traçando o curso para determinar a base .....                       | 138 |
| Estendendo a base para matrizes e polinômios .....                  | 141 |
| Encontrando a dimensão com base na base.....                        | 144 |

## **Capítulo 8: Fazendo Mudanças com Transformações Lineares..... 147**

|  |     |
|--|-----|
| Formulando as Transformações Lineares.....                                 | 147 |
| Detalhando o jargão transformação linear .....                             | 148 |
| Reconhecendo quando uma transformação<br>é uma transformação linear .....  | 151 |
| Propondo Propriedades de Transformações Lineares .....                     | 154 |
| Resumindo as propriedades da soma.....                                     | 154 |
| Apresentando a composição da transformação<br>e algumas propriedades ..... | 156 |
| Controlando a identidade com transformações de identidade.....             | 159 |
| Aprofundando-se na propriedade distributiva.....                           | 161 |
| Escrevendo a matriz de uma transformação linear.....                       | 161 |
| Fabricando uma matriz para substituir uma regra .....                      | 162 |
| Visualizando transformações que envolvem rotações e reflexões.....         | 163 |
| Transladando, dilatando e contrastando.....                                | 167 |
| Determinando o Núcleo e o Intervalo de uma Transformação Linear .....      | 169 |
| Acompanhando o Núcleo.....   | 169 |
| Parando para encontrar o intervalo .....                                   | 170 |

## **Parte III: Avaliando Determinantes..... 173**

### **Capítulo 9: Mantendo as Coisas em Ordem com Permutações..... 175**

|   |     |
|---|-----|
| Calculando e Investigando Permutações .....     | 176 |
| Contando com aprender como contar .....         | 176 |
| Fazendo uma lista e verificando duas vezes..... | 177 |

|   |            |
|---|------------|
| Trazendo as permutações para as matrizes<br>(ou matrizes para permutações) .....  | 180        |
| Envolvendo Inversões na Contagem .....  | 181        |
| Investigando inversões.....   | 181        |
| Convidando inversões pares e ímpares para a festa .....                           | 183        |
| <b>Capítulo 10: Determinando Valores de Determinantes.....</b>                    | <b>185</b> |
| Avaliando os Determinantes de Matrizes $2 \times 2$ .....                         | 185        |
| Envolvendo permutações na determinação do determinante .....                      | 186        |
| Lidando com a expansão do cofator .....   | 189        |
| Utilizando determinantes com área e volume .....                                  | 192        |
| Encontrando as áreas de triângulos .....  | 192        |
| Em busca das áreas do paralelogramo .....   | 195        |
| Pagando o pato com volumes de paralelepípedos.....                                | 198        |
| <b>Capítulo 11: Personalizando as Propriedades de Determinantes.....</b>          | <b>201</b> |
| Transpondo e Invertendo Determinantes.....  | 202        |
| Determinando o determinante de uma transposição .....                             | 202        |
| Investigando o determinante do inverso .....                                      | 203        |
| Alternando Linhas e Colunas .....   | 204        |
| Zerando em Determinantes de Zero .....  | 206        |
| Encontrando uma linha ou coluna de zeros.....                                     | 206        |
| Zerando linhas ou colunas iguais.....   | 206        |
| Manipulando Matrizes pela Multiplicação e Combinação .....                        | 209        |
| Multiplicando uma linha ou coluna por um escalar.....                             | 209        |
| Adicionando o múltiplo de uma linha ou coluna<br>à outra linha ou coluna .....    | 212        |
| Lidando com Matrizes Triangulares Superiores ou Inferiores.....                   | 213        |
| Em busca dos determinantes das matrizes triangulares .....                        | 213        |
| Inventando uma matriz triangular a partir do zero .....                           | 214        |
| Criando uma matriz triangular superior ou inferior .....                          | 217        |
| Determinantes de Produtos Matriciais .....  | 221        |
| <b>Capítulo 12: Tirando Vantagem da Regra de Cramer.....</b>                      | <b>223</b> |
| Convidando as Inversas Para a Festa com Determinados Determinantes .....          | 223        |
| Definindo o cenário para encontrar inversos .....                                 | 224        |
| Introduzindo a adjunta de uma matriz .....  | 225        |
| Instigando os passos para o inverso .....   | 228        |
| Tomando medidas calculadas com elementos variáveis.....                           | 229        |
| Resolvendo Sistemas Usando a Regra de Cramer.....                                 | 231        |
| Atribuindo as posições para a regra de Cramer.....                                | 231        |
| Aplicando regra de Cramer.....  | 232        |
| Reconhecendo e Lidando com uma Não Resposta .....                                 | 234        |
| Obtendo pistas a partir das soluções<br>algébricas e das matrizes aumentadas..... | 234        |
| Solucionando com Cramer quando não há solução .....                               | 235        |
| No Caso de Calculadoras e Programas de Computador.....                            | 236        |

|                                     |     |
|-------------------------------------|-----|
| Calculando com uma calculadora..... | 236 |
| Calculando com um computador.....   | 238 |

**Parte IV: Conhecendo Espaços Vetoriais ..... 239**

**Capítulo 13: Promovendo as Propriedades de Espaços Vetoriais ..... 241**

|  |     |
|--|-----|
| Investigando o Espaço Vetorial.....                                    | 241 |
| Descrevendo as Duas Operações.....                                     | 243 |
| Deixando espaços vetoriais crescerem com a adição de vetores.....      | 243 |
| Tornando a multiplicação vetorial significativa.....                   | 244 |
| Olhando para o fechamento das operações vetoriais.....                 | 245 |
| Descobrimo as falhas para fechar.....                                  | 246 |
| Recordando as especificidades das propriedades do espaço vetorial..... | 247 |
| Alterando a ordem com a comutatividade da adição vetorial.....         | 248 |
| Reagrupamento com adição e multiplicação escalar.....                  | 250 |
| Distribuindo a riqueza de escalares sobre vetores.....                 | 251 |
| Acabando com a ideia de um vetor zero.....                             | 253 |
| Acrescentando o inverso da adição.....                                 | 253 |
| Deliciando-se em alguns detalhes finais.....                           | 254 |

**Capítulo 14: Buscando Subespaços de um Espaço Vetorial..... 255**

|   |     |
|---|-----|
| Investigando as Propriedades Associadas a Subespaços.....       | 256 |
| Determinando se você tem um subconjunto.....                    | 256 |
| Obtendo espaço com um subconjunto sendo um espaço vetorial..... | 259 |
| Encontrando um Conjunto Gerador para um Espaço Vetorial.....    | 261 |
| Verificando um candidato para o espaço gerado.....              | 261 |
| Colocando polinômios na mistura de espaço gerado.....           | 262 |
| Inclinando os resultados com uma matriz assimétrica.....        | 263 |
| Definindo e Usando o Espaço Coluna.....                         | 265 |
| Conectando o Espaço Nulo e o Espaço Coluna.....                 | 270 |

**Capítulo 15: Pontuando com Bases de Espaços Vetoriais ..... 273**

|  |     |
|--|-----|
| Geometrizando com Espaços Vetoriais.....                       | 274 |
| Alinhando com linhas.....                                      | 274 |
| Esclarecendo os planos.....                                    | 275 |
| Criando Bases para Conjuntos Geradores.....                    | 276 |
| Fazendo os Movimentos Certos com Bases Ortogonais.....         | 279 |
| Criando uma base ortogonal.....                                | 281 |
| Usando a base ortogonal para escrever a combinação linear..... | 282 |
| Tornando o ortogonal ortonormal.....                           | 283 |
| Escrevendo o Mesmo Vetor após Alterar as Bases.....            | 285 |

**Capítulo 16: De Olho em Autovalores e Autovetores ..... 289**

|   |     |
|---|-----|
| Definindo Autovalores e Autovetores.....    | 289 |
| Demonstrando autovetores de uma matriz..... | 290 |
| Lidando com a definição autovetor.....      | 291 |

|   |     |
|---|-----|
| Ilustrando autovetores com reflexos e rotações .....          | 291 |
| Encontrando Autovalores e Autovetores .....                   | 294 |
| Determinando os autovalores de uma matriz $2 \times 2$ .....  | 294 |
| Entrando em profundidade com uma matriz $3 \times 3$ .....    | 297 |
| Circulando ao Redor das Circunstâncias Especiais .....        | 299 |
| Transformando autovalores de uma matriz de transposição ..... | 300 |
| Reciprocando com a reciprocidade do autovalor .....           | 301 |
| Triangulando com matrizes triangulares .....                  | 302 |
| Elevando as potências das matrizes .....                      | 303 |
| Fazendo Certo com a Diagonalização .....                      | 304 |

## ***Parte V: A Parte dos Dez***..... **309**

### **Capítulo 17: Dez Formas de Utilizar as Matrizes no Mundo Real** ..... **311**

|  |     |
|--|-----|
| Comendo Direito .....                        | 311 |
| Controlando o Tráfego .....                  | 312 |
| Pegando o Jeito com o "Predador-Presa" ..... | 314 |
| Criando uma Mensagem Secreta .....           | 315 |
| Salvando a Coruja Malhada .....              | 317 |
| Migrando Populações .....                    | 318 |
| Traçando o Código Genético .....             | 318 |
| Distribuindo o Calor .....                   | 320 |
| Fazendo Planos Econômicos .....              | 321 |
| Jogando com Matrizes .....                   | 322 |

### **Capítulo 18: Dez (ou mais) processos de Álgebra Linear que Você Pode Fazer em sua Calculadora** ..... **327**

|  |     |
|--|-----|
| Deixando o Gráfico de Linhas Resolver um Sistema de Equações ..... | 328 |
| Moldando a Maioria das Matrizes .....                              | 329 |
| Adição e subtração de matrizes .....                               | 330 |
| Multiplicação por um escalar .....                                 | 330 |
| Multiplicando duas matrizes juntas.....                            | 330 |
| Executando Operações de Linha .....                                | 331 |
| Alterando linhas .....   | 331 |
| Adicionando duas linhas juntas .....                               | 331 |
| Adicionando o múltiplo de uma linha a outra .....                  | 332 |
| Multiplicando uma linha por um escalar .....                       | 332 |
| Criando uma forma escalonada .....                                 | 333 |
| Elevando às Potências e Encontrando Inversos.....                  | 334 |
| Elevando matrizes a potências .....                                | 334 |
| Convidando inversos .....  | 334 |
| Determinando os Resultados de uma Cadeia de Markov .....           | 334 |
| Solução de Sistemas Utilizando $A^{-1} \cdot B$ .....              | 336 |
| Ajustando Para um Valor Local Particular.....                      | 337 |

---

|  |                |
|--|----------------|
| <b>Capítulo 19: Dez Significados Matemáticos de Letras Gregas.....</b> | <b>339</b>     |
| Sem mais $\pi$ adinhas.....  | 339            |
| Determinando a Diferença com $\Delta$ .....                            | 340            |
| Somando com $\Sigma$ .....   | 340            |
| Ho, ho, $\rho$ , Feliz Natal!.....                                     | 340            |
| Tomando os Ângulos com $\theta$ .....                                  | 340            |
| $\varepsilon$ , para Variar.....                                       | 341            |
| Lá, Sol, Fá: Tenha Dó de $\mu$ .....                                   | 341            |
| Dançando $\lambda$ .....   | 341            |
| Exibindo sua Chave $\Phi BK$ .....                                     | 342            |
| Chegando ao Fim com $\omega$ .....                                     | 342            |
| <br><b><i>Glossário</i> .....</b>                                      | <br><b>343</b> |
| <br><b><i>Índice</i> .....</b>   | <br><b>351</b> |





# Introdução

---

**A** álgebra linear é geralmente a porta de entrada dos matemáticos principiantes ao mundo *real* da matemática. “O quê?”, você diz, provavelmente se perguntando que diabos fez até aqui senão matemática de verdade. Depois de tudo, você começou calculando números reais como uma criança e trabalhou do seu jeito em algumas coisas realmente boas – provavelmente em alguns cálculos também.

Eu não estou tentando diminuir suas realizações até aqui, mas agora você se aventurou em um universo matemático que lança uma nova luz sobre a estrutura matemática. Todas as regras de verdadeiro e falso e princípios de aritmética e álgebra, trigonometria e geometria, ainda são aplicados, mas a álgebra linear visa estas regras, as opera e o ajuda a vê-las de forma mais aprofundada.

Você vai achar que na álgebra linear é possível definir seu próprio conjunto ou agrupamento de objetos – decidir quem vai jogar o jogo por critérios particulares e selecionados – e então determinar quem vai permanecer no grupo com base em seus padrões. As operações envolvidas na álgebra linear são bastante precisas e um pouco limitadas. Você não tem as operações visuais (tais como adição, subtração, multiplicação e divisão) para executar os objetos em seu conjunto, mas na verdade isto não afeta as possibilidades. Você vai encontrar novas formas de analisar as operações e utilizá-las em suas investigações sobre álgebra linear e as jornadas pelos diferentes aspectos do assunto.

A álgebra linear inclui sistemas de equações, transformações lineares, vetores, matrizes e determinantes. Provavelmente você já viu a maioria dessas estruturas em diferentes contextos, mas a álgebra linear enlaça todos de maneira especial.

## *Sobre Este Livro*

A álgebra linear inclui vários tópicos que podem ser investigados sem que haja necessidade real de se perder tempo em outros. Você realmente não precisa ler este livro do início ao fim (ou mesmo do fim para o início!). Você pode estar interessado especificamente em determinantes e partir diretamente para o capítulo que aborda o assunto. Caso precise de uma ajudinha conforme estiver lendo as explicações sobre determinantes, então eu o encaminho para outros capítulos do livro, nos quais encontrará as informações necessárias. De fato, ao longo deste livro, lhe indico rapidamente onde encontrar mais informações sobre tópicos em outros capítulos. O layout do livro é lógico e segue um planejamento, mas o meu planejamento não tem de ser o seu. Defina o seu próprio percurso.

# Convenções Usadas Neste Livro

Você achará que o material deste livro é uma referência útil para o seu estudo de álgebra linear. Conforme passo pelas explicações, utilizo o *itálico* para introduzir novos termos. Defino as palavras ali mesmo, mas, se isso não for o suficiente, você pode consultar o glossário para saber mais sobre elas e outras de significado similar. Além disso, você vai encontrar palavras em **negrito** conforme apresento uma lista de características ou etapas necessárias para executar uma função.

## Só de Passagem

Você não precisa ler cada palavra deste livro para obter as informações de que precisa.

Se estiver com pressa ou quiser fazer apenas um passeio rápido, aqui estão algumas partes que você pode pular:

- ✔ **Boxes:** Textos em caixa cinza são chamados de boxes. Contêm informações interessantes, mas que não são essenciais para a compreensão do tema abordado.
- ✔ **Texto marcado com o ícone Papo de Especialista:** Para saber mais sobre este ícone, consulte "Ícones Usados Neste Livro", mais adiante nesta Introdução.
- ✔ **A página de direitos autorais:** A menos que você seja o tipo de pessoa que lê os ingredientes de cada alimento que põe em sua boca, você provavelmente não vai perder nada pulando isto!

## Penso que...

Conforme planejava e escrevia este livro, tive que fazer algumas suposições sobre você e sua familiaridade com a matemática. Suponho que você tenha algum conhecimento prático de álgebra e que ao menos já tenha estudado geometria e trigonometria. Não, você não precisa fazer nenhuma prova geométrica ou medir qualquer ângulo, mas as operações algébricas e os símbolos de agrupamento são utilizados na álgebra linear, e refiro-me às transformações geométricas, tais como rotações e reflexões, ao trabalhar com as matrizes. Vou explicar o que vai acontecer, mas ajudará se você já tiver alguma noção.

# Como Este Livro Está Organizado

Este livro é dividido em várias *partes*, e cada uma delas contém vários capítulos. Cada capítulo também é subdividido em seções, cada uma com um tema unificador. Tudo é muito organizado e lógico, portanto, você será capaz de ir de seção a seção, capítulo a capítulo, e de parte a parte com uma ideia mais concreta do que vai encontrar quando chegar lá.

O tema álgebra linear envolve equações, matrizes e vetores, mas na realidade, você não pode separá-los completamente. Mesmo que uma determinada seção se concentre em um ou outro conceito, você encontra os demais tópicos exercendo suas funções específicas e sendo incluídos na discussão.

## ***Parte I: Alinhando os Fundamentos da Álgebra Linear***

Nesta parte, você encontrará várias abordagens diferentes para organizar números e equações. Os capítulos sobre vetores e matrizes mostrarão linhas e colunas de números arranjados de maneira organizada. Você realiza as operações sobre os números arranjados, às vezes com resultados surpreendentes. A estrutura matricial permite que muitos cálculos de álgebra linear sejam feitos de forma mais eficiente. Outro tema fundamental é o sistema de equações. Você descobre como são classificadas, e vê como resolvê-las de forma algébrica ou com matrizes.

## ***Parte II: Relacionando Vetores e Transformações Lineares***

A Parte II é onde você começa a ver uma outra dimensão do mundo da matemática. Você toma vetores racionais e matrizes e os une com as combinações lineares. E, como se isso não bastasse, você analisa soluções das equações vetoriais e testa sistemas homogêneos. Não fique intimidado com todas essas grandes palavras e frases impressionantes que estou lançando. Estou apenas dando uma dica sobre o que mais você pode fazer – de fato, algumas coisas realmente interessantes.

## ***Parte III: Avaliando Determinantes***

Um determinante é uma função. Você aplica esta função em uma matriz quadrada e do nada aparece a resposta: um único número. Os capítulos desta parte abordam como executar a função determinante em diferentes tamanhos de matrizes, como alterar as matrizes para cálculos mais convenientes, e como são algumas das aplicações de determinantes.

## Parte IV: Envolvendo Espaços Vetoriais

Os capítulos desta parte abordam minuciosamente espaços vetoriais e seus subespaços. Você vê como a independência linear se encaixa com espaços vetoriais, e mais: abordo os autovalores e autovetores, e como eles interagem com matrizes específicas.

## Parte V: A Parte dos Dez

Os três últimos capítulos são listas de dez itens, com alguns detalhes intrigantes para cada item na lista. Primeiro, apresento uma lista de algumas das muitas aplicações de matrizes – coisas para as quais as matrizes são realmente utilizadas no mundo real. O segundo capítulo desta parte trata sobre o uso da calculadora gráfica para trabalhar com matrizes. Finalmente, apresento dez das letras gregas mais comumente utilizadas e o que elas representam na matemática e nas outras ciências.

## Ícones Usados Neste Livro

Sem dúvida, você vê muitos ícones interessantes na tela de abertura de seu computador. Os ícones são realmente úteis para as entradas rápidas e manipulações ao executar as diferentes tarefas que você precisa fazer. O que é muito útil nestes ícones é que eles normalmente incluem algum símbolo que sugere o que determinado programa faz. O mesmo vale para os ícones usados neste livro.



Este ícone avisa sobre as informações importantes ou as regras necessárias para resolver um problema ou continuar com a explicação do tema. O ícone serve como um marcador para que você possa se lembrar de algo enquanto continua sua leitura. As informações indicadas pelo ícone Lembre-se são extremamente necessárias para a matemática envolvida na seção em que se localiza.



O material indicado por este ícone é a matemática maravilhosa. É estreitamente relacionado ao tema em questão, mas não é absolutamente necessário para a sua compreensão do material. Você pode pegar ou largar – o que você preferir.



Quando você vir este ícone, vai encontrar algo útil ou que economiza tempo. Não vai ser surpreendente, mas é algo que vai lhe dar base.



A imagem neste ícone diz tudo. Você realmente deverá prestar atenção quando vir o ícone Cuidado. Eu o uso para alertá-lo de uma armadilha particularmente grave ou um equívoco. Eu não o utilizo muito, então você não vai pensar que é um alarme falso quando o vir em uma seção.

## *De Lá para Cá, Daqui para Lá*

Você realmente não tem como escolher um mau lugar onde mergulhar neste livro. Se você está mais interessado, primeiramente, em ver como está a água, comece com vetores e matrizes nos Capítulos 2 e 3, e veja como eles interagem uns com os outros. Outra boa seção para dar uma mergulhada é o Capítulo 4, onde você descobre diferentes abordagens para resolver sistemas de equações. Então, novamente, mergulhar diretamente nas transformações lhe dará mais de uma ideia de como são os movimentos da corrente através da álgebra linear. No Capítulo 8, você encontra transformações lineares, mas outros tipos de transformações também abrem o seu caminho para os capítulos da Parte II. Você pode preferir começar a ter um pouco de fundamento com os cálculos matemáticos, de modo que pode ir ao Capítulo 9, sobre permutações, ou olhar os Capítulos 10 e 11, que explicam como os determinantes são avaliados. Mas se você está querendo mergulhar de cabeça na álgebra linear, então vá direto aos espaços vetoriais na Parte IV e analise os autovalores e autovetores no Capítulo 16. Não importa que você possa mudar de seção a qualquer momento. Iniciar ou terminar, mergulhar ou nadar – não há maneira certa ou errada de abordar este tema flutuante.



# Parte I

# Alinhando os Fundamentos da Álgebra Linear

**A 5ª Onda**

Por Rich Tennant





## *Nesta parte...*

**U**ocê está prestes a conhecer uma estrela digna de Hollywood: Al. Não, não estou falando do Sr. Pacino (mas acharia fantástico conhecê-lo pessoalmente), mas de um dos principais nomes gravados na calçada da fama matemática: a Álgebra Linear. Assim, como um Poderoso Chefão, faça-me uma proposta irrecusável: saia de baixo dos holofotes hollywoodianos, coloque-se à luz de sistemas de equações, matrizes e vetores, e fique cara a cara com a Álgebra Linear.

# Capítulo 1

# Definindo a Álgebra Linear

---

## *Neste Capítulo*

- ▶ Alinhando a parte algébrica da álgebra linear com sistemas de equações
  - ▶ Fazendo onda com matrizes e determinantes
  - ▶ Justificando-se com vetores
  - ▶ De olho em autovalores e autovetores
- 

**A**s palavras *álgebra* e *linear* não aparecem sempre juntas. A palavra linear é um adjetivo usado em muitos cenários: equações lineares, regressão linear, programação linear, tecnologia linear, e por aí vai. A palavra álgebra, claro, é familiar ao colégio e a muitos estudantes do ensino médio. Quando usadas juntas, as duas palavras descrevem uma área da matemática na qual alguns símbolos algébricos tradicionais, operações e manipulações são combinados com vetores e matrizes a fim de criar sistemas ou estruturas que são utilizadas para se diversificar em outros estudos matemáticos ou ser utilizadas em aplicações práticas em diversos campos da ciência e negócios.

Os principais elementos da álgebra linear são sistemas de equações lineares, vetores e matrizes, transformações lineares, determinantes e espaços vetoriais. Cada um desses tópicos tem uma vida própria, diversificando em sua própria ênfase especial e retornando ao ponto de partida. Além disso, cada um dos tópicos principais ou áreas são entrelaçados aos outros; isto como uma relação simbiótica — a melhor de todo o mundo.

Você pode encontrar os sistemas de equações lineares no Capítulo 4, vetores no Capítulo 2 e matrizes no Capítulo 3. É claro, isto é apenas o ponto de partida para estes tópicos. Os usos e aplicações destes tópicos continuam por todo o livro. No Capítulo 8, você tem uma ideia mais ampla de acordo com as transformações lineares; os determinantes começam no Capítulo 10 e os espaços vetoriais são apresentados no Capítulo 13.

# Resolvendo Sistemas de Equações de Todas as Maneiras

Um *sistema de equações* é um grupo ou uma lista de enunciados matemáticos que são ligados por alguma razão. As equações podem se associar a outras porque todas descrevem a relação entre duas ou mais variáveis desconhecidas. Ao estudar sistemas de equações (ver Capítulo 4), você tenta determinar se equações ou enunciados diferentes têm alguma solução comum – conjuntos de valores de substituição para as variáveis que fazem com que todas as equações tenham o valor da verdade ao mesmo tempo.

Por exemplo, o sistema de equações mostrado aqui consiste em três diferentes equações que são todas verdadeiras (um lado é igual ao outro) quando  $x = 1$  e  $y = 2$ .

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ y^2 - x = 3 \\ \sqrt{x + 3} = y \end{cases}$$

O único problema com o conjunto de equações que acabei de mostrar a você, até o ponto que interessa à álgebra *linear*, é que a segunda e a terceira equação no sistema *não são* lineares.



Uma *equação linear* tem a forma  $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots + a_nx_n = k$ , na qual  $a_i$  é um número real qualquer,  $x_i$  é uma variável e  $k$  é alguma constante.

Note que, em uma equação linear, cada uma das variáveis tem um expoente de exatamente 1. Sim, eu sei que você não está vendo nenhum expoente sobre os  $x$ , mas este é um procedimento padrão – o número 1 é presumido. Mostrarei isso mais tarde nos sistemas de equações. Eu utilizei  $x$  e  $y$  para as variáveis em vez do  $x$  subscrito. É mais fácil de escrever (ou digitar)  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , e só quando trabalharmos com sistemas maiores é que utilizaremos os subscritos em uma única letra.

Depois mostrarei um sistema de equações lineares. Eu usarei  $x$ ,  $y$ ,  $z$  e  $w$  para as variáveis em vez de  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ , e  $x_4$ .

$$\begin{cases} 2x + y - 3z + 4w = 11 \\ x + 3y - 2z + w = 5 \\ 3x + y + 2w = 13 \\ 4x + y + 5z - w = 17 \end{cases}$$

O sistema de quatro equações lineares com quatro variáveis ou incógnitas *tem* uma solução única. Cada equação é verdadeira quando  $x = 1$ ,  $y = 2$ ,  $z = 3$  e  $w = 4$ . Agora, um aviso: Nem todo sistema de equações lineares tem uma solução. Alguns sistemas de equações não têm soluções e outros têm muitas ou infinitas soluções. O que você encontrará no Capítulo 4 é como determinar qual situação você tem: nenhuma, uma ou muitas soluções.

Os sistemas de equações lineares são usados para descrever a relação entre várias entidades. Por exemplo, você pode ter uma loja de doces e querer criar diferentes seleções de embalagens de bala. Você quer definir uma caixa de 1 quilo, uma de 2 quilos, uma de 3 quilos, e uma caixa destruidora de dietas de 4 quilos. Agora, vou descrever os conteúdos das diferentes caixas. Após ler todas as descrições você terá uma ótima noção do quanto as equações correspondentes são boas e puras.

Os quatro tipos de doces que você usará são: torrone, creme, doce de nozes e caramelo. A caixa de 1 quilo contém três torrões, um creme, um doce de nozes e dois caramelos; a caixa de dois quilos contém três torrões, dois cremes, três doces de nozes e quatro caramelos; a caixa de 3 quilos contém quatro torrões, dois cremes, oito doces de nozes e quatro caramelos, e a caixa de 4 quilos contém seis torrões, cinco cremes, oito doces de nozes e seis caramelos. Quanto pesa cada caixa de doces?

Se considerarmos o peso dos torrões como  $x_1$ , o peso dos cremes como  $x_2$ , o dos doces de nozes como  $x_3$  e o peso dos caramelos como  $x_4$ , teremos um sistema de equações parecido com este:

$$\begin{cases} 3x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 2x_4 = 16 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 32 \\ 4x_1 + 2x_2 + 8x_3 + 4x_4 = 48 \\ 6x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 6x_4 = 64 \end{cases}$$

Os quilos são transformados em gramas em cada caso e a solução do sistema de equações lineares é  $x_1 = 1$  grama,  $x_2 = 2$  gramas,  $x_3 = 3$  gramas e  $x_4 = 4$  gramas. Sim, esta é uma representação muito simples de um negócio de doces, mas isto serve para mostrar como os sistemas de equações lineares são definidos e como eles funcionam para resolver problemas complexos. Você resolve tal sistema usando métodos algébricos ou matrizes. Vá ao Capítulo 4 se você quer mais informações sobre como lidar com tal situação.

Os sistemas de equações nem sempre têm soluções. De fato, uma equação simples, por si só, pode ter infinitas soluções. Considere a equação  $2x + 3y = 8$ . Utilizando pares ordenados  $(x, y)$  para representar os números que queremos, algumas das soluções do sistema são  $(1, 2)$ ,  $(4, 0)$ ,  $(-8, +8)$  e  $(10, -4)$ . No entanto, nenhuma das soluções da equação  $2x + 3y = 8$  é também uma solução da equação  $4x + 6y = 10$ . Você pode