1.001 Problemas de Cálculo Para Leigos

Folha de Cola

Resolver problemas de cálculo é uma ótima maneira de dominar as diversas regras, os teoremas e as operações que você encontra em uma típica aula de cálculo. Esta Folha de Cola fornece algumas fórmulas básicas que você pode consultar regularmente para solucionar os problemas de forma rápida (bem, talvez não tão rápido, porém definitivamente mais facilmente).

Teoremas, Fórmulas e Definições Úteis de Cálculo

A seguir estão alguns dos mais frequentemente e usados teoremas, fórmulas e definições que você pode encontrar nas aulas de cálculo para uma única variável. A lista não é abrangente, no entanto, deve cobrir os itens que você mais usará.

Derivada Usando a Definição de Limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Definição: Função Contínua em um número a

A função f é contínua em um número a se $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Teorema do Valor Intermediário

Suponha que f seja contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e seja N qualquer número entre $f(a)$ e $f(b)$, em que $f(a) \neq f(b)$. Então, existe um número c em (a, b), tal que $f(c) = N$.

Definição de Número Crítico

O *número crítico* de uma função f é um número c no domínio de f de tal modo que $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não exista.

Teorema de Rolle

Seja f uma função que satisfaça as três hipóteses a seguir:

- f é contínua no intervalo fechado $[a, b]$.
- f é diferenciável no intervalo aberto (a, b).
- $f(a) = f(b)$

Portanto, há um número c em (a, b), de modo que $f'(c) = 0$.

Teorema do Valor Médio

Seja f uma função que satisfaça as hipóteses a seguir:

- f é contínua no intervalo fechado $[a, b]$.
- f é diferenciável no intervalo aberto (a, b).

Portanto, há um número c em (a, b), de modo que, $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Fórmula do Método de Aproximação de Newton

O método de Newton é uma técnica que tenta descobrir uma raiz de uma equação. Para começar, escolha um número que seja "próximo" ao valor de uma raiz e chame-o de x_1. Escolher x_1 pode envolver algumas tentativas e erros. Se você estiver lidando com uma função contínua em algum intervalo (ou, possivelmente, em toda reta real), o teorema do valor intermediário talvez diminua o intervalo em análise. Após definir x_1, use a fórmula recursiva aqui fornecida para encontrar as aproximações sucessivas:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Atenção: sempre verifique se sua aproximação final está correta (ou próxima do valor da raiz). O método de Newton pode falhar em alguns casos, de acordo com o valor definido para x_1. Qualquer livro de cálculo que aborde este método deve apontar essas deficiências.

O Teorema Fundamental do Cálculo

Suponha que f seja contínua em $[a, b]$. Logo, as seguintes afirmações são verdadeiras:

Se $g(x) = \int_a^x f(t)dt$, então, $g'(x) = f(x)$

$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, em que F é qualquer antiderivada de f, isto é $F' = f$

A Regra do Trapézio

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{\Delta x}{2}\left(f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\right)$$

em que

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} \text{ e } x_i = a + i\Delta x$$

A Regra de Simpson

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{\Delta x}{3}\left(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \ldots\right.$$

$$\left. + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\right)$$

em que n é par e

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

1.001 Problemas de Cálculo Para Leigos

Folha de Cola

Fórmulas de Limites Especiais em Cálculo

Muitas pessoas encontram os seguintes limites em um livro de cálculo quando tentam provar as fórmulas da derivada para a função do seno e do cosseno. Estes resultados não são imediatamente óbvios e normalmente dão trabalho para serem comprovados. Qualquer livro de cálculo deve fornecer mais explicações se você estiver interessado em saber mais!

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{\text{sen } x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$$

Fórmulas da Derivada e da Integral para as Funções Hiperbólicas

As funções hiperbólicas são certas combinações das funções exponenciais e^x e e^{-x}. Essas funções ocorrem com frequência em equações diferenciais e de engenharia, pois são normalmente estudadas nas aulas de um curso de cálculo. Alguns dos usos reais dessas funções se relacionam com o estudo das transmissões elétricas e dos cabos de suspensão.

Derivada	Antiderivada/Integral
$\frac{d}{dx}(\cosh x) = \text{senh } x$	$\int \text{senh } x \, dx = \cosh x + C$
$\frac{d}{dx}(\text{senh } x) = \cosh x$	$\int \cosh x \, dx = \text{senh } x + C$
$\frac{d}{dx}(\text{tgh } x) = \text{sech}^2 x$	$\int \text{sech}^2 x \, dx = \text{tgh } x + C$
	$\int \text{tgh } x \, dx = \ln(\cosh x) + C$
$\frac{d}{dx}(\coth x) = -\text{cossech}^2 x$	$\int \text{cossech}^2 x \, dx = -\coth x + C$
	$\int \coth x \, dx = \ln\lvert\text{senh } x\rvert + C$
$\frac{d}{dx}(\text{sech } x) = -\text{sech } x \, \text{tgh } x$	$\int \text{sech } x \, \text{tgh } x \, dx = -\text{sech } x + C$
	$\int \text{sech } x \, dx = \text{tg}^{-1}\lvert\text{senh } x\rvert + C$
$\frac{d}{dx}(\text{cossech } x) = -\text{cossech } x \coth x$	$\int \text{cossech } x \coth x \, dx = -\text{cossech } x + C$
	$\int \text{cossech } x \, dx = \ln\left\lvert\text{tgh}\left(\frac{1}{2}x\right)\right\rvert + C$

Para Leigos: A série de livros para iniciantes que mais vende no mundo.